חדו"א – פולינום, רציונלית ושורש

מצגת הסבר – חקירת פונקציה, שטח ובעיות קיצון

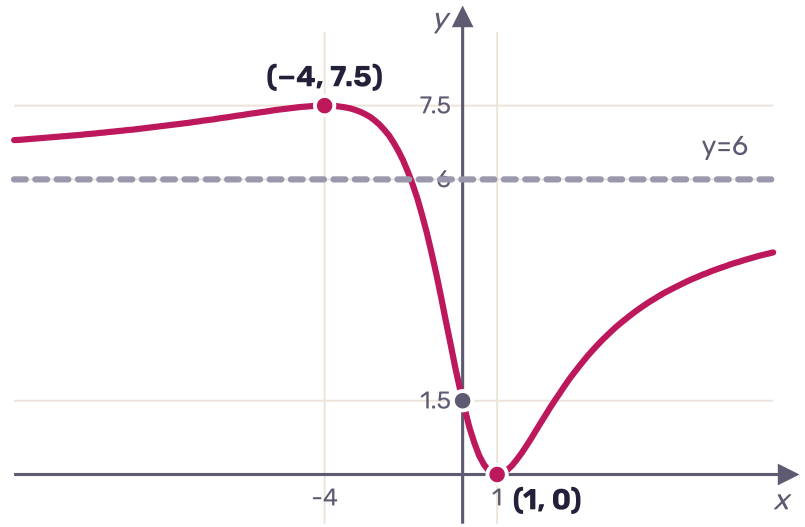
מתמטיקה 5 יח"ל | שאלון 35571 | תכנית חדשה

האתר נבנה ע"י עדי והבינה

מה נלמד?

בבחינה זו **שאלות 6–8** (שאלה 7 לפעמים טריגונומטרית – יש לה מצגת נפרדת):

1. **חקירת פונקציה** רציונלית או עם שורש, לרוב עם **פרמטר**
2. **שטח** בעזרת פונקציה קדומה (אינטגרל)
3. **בעיית קיצון**: מה ה־t שבו שטח / אורך / סכום מקסימלי או מינימלי
4. קריאת גרף של f' (או f'') והסקה על f



בגרות קיץ תשפ"ו מועד ב', שאלה 6

שלבי החקירה

1. **תחום הגדרה** – מכנה $\neq 0$, ביטוי בתוך שורש ≥ 0.
2. **נקודות חיתוך** עם הצירים: מציבים $x = 0$, ואחר כך $y = 0$.
3. **אסימפטוטות** – אנכיות ואופקיות.
4. **נגזרת** ← $f'(x) = 0$ ← טבלת סימנים ← תחומי עלייה וירידה ו**נקודות קיצון**.
5. (כשמבקשים) נגזרת שנייה ← **נקודות פיתול**.
6. **סקיצה** – לפי כל מה שמצאנו.

עם פרמטר

עונים „בעזרת a" עד שנותנים נתון נוסף (למשל „שיעור ה־y של המקסימום הוא 7.5"), ואז מוצאים את a ומציבים.

שימו לב לנתון על הסימן, למשל $a > 0$ – הוא קובע את סדר הנקודות בטבלה.

מהנוסחאון: נגזרות

נגזרות בסיסיות

$$(x^t)' = t \cdot x^{t-1} \quad (t \text{ ממשי})$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

נגזרת של מכפלת פונקציות

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

נגזרת של מנת פונקציות

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

נגזרת של פונקצייה מורכבת

$$[f(u(x))]' = f'(u) \cdot u'(x)$$

$u'(x)$ – נגזרת פנימית, $f'(u)$ – נגזרת חיצונית

מהנוסחאון: אינטגרלים

אינטגרלים בסיסיים

$$\int x^t\,dx = \frac{x^{t+1}}{t+1} + C \quad (t \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x} + C$$

אם F קדומה של f

$$\int f(mx+b)\,dx = \frac{1}{m}F(mx+b) + C$$

$$\int f[u(x)]\cdot u'(x)\,dx = F[u(x)] + C$$

שטח

שטח בין גרף אי־שלילי לציר ה־x: $S = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

שטח בין שני גרפים, כאשר גרף f מעל גרף g: $S = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,dx$

תחום הגדרה ואסימפטוטות

אסימפטוטה אנכית

ב־x שבו המכנה מתאפס (והמונה לא).

אסימפטוטה אופקית ($x \to \pm\infty$)

מעלת המונה **קטנה** ממעלת המכנה ← $y = 0$

המעלות **שוות** ← $y =$ יחס המקדמים המובילים

מעלת המונה **גדולה** ← אין אסימפטוטה אופקית

עם שורש – בודקים בנפרד $x \to \infty$ ו־$x \to -\infty$.

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד ב' • שאלה 6

$f(x) = \dfrac{6(x-1)^2}{x^2+a}$ כאשר $a > 0$

תחום: $x^2 + a > 0$ תמיד ← כל x.

אנכית: אין – המכנה לא מתאפס.

אופקית: המונה $6x^2 - 12x + 6$, המעלות שוות:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{6x^2 - 12x + 6}{x^2 + a} = 6$$

$$y = 6$$

נקודות קיצון: נגזרת וטבלת סימנים

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד ב' • שאלה 6

נגזרת המנה; מונה הנגזרת:

$$12(x-1)(x^2+a)-6(x-1)^2\cdot 2x$$
$$=12(x-1)\left[x^2+a-x(x-1)\right]=12(x-1)(x+a)$$
$$f'(x)=\frac{12(x-1)(x+a)}{(x^2+a)^2}=0\ \Rightarrow\ x=1,\ x=-a$$
$$f(1)=0 \qquad f(-a)=\frac{6(a+1)}{a}$$

x	f'	f
$x<-a$	+	עולה
$x=-a$	0	מקסימום
$-a<x<1$	–	יורדת
$x=1$	0	מינימום
$x>1$	+	עולה

המכנה של f' חיובי תמיד. כי $a>0$, הנקודה $-a$ משמאל ל־1.

מקסימום $\left(-a,\frac{6(a+1)}{a}\right)$**, מינימום** $(1,0)$

ג. המקסימום ב־$y=7.5$:

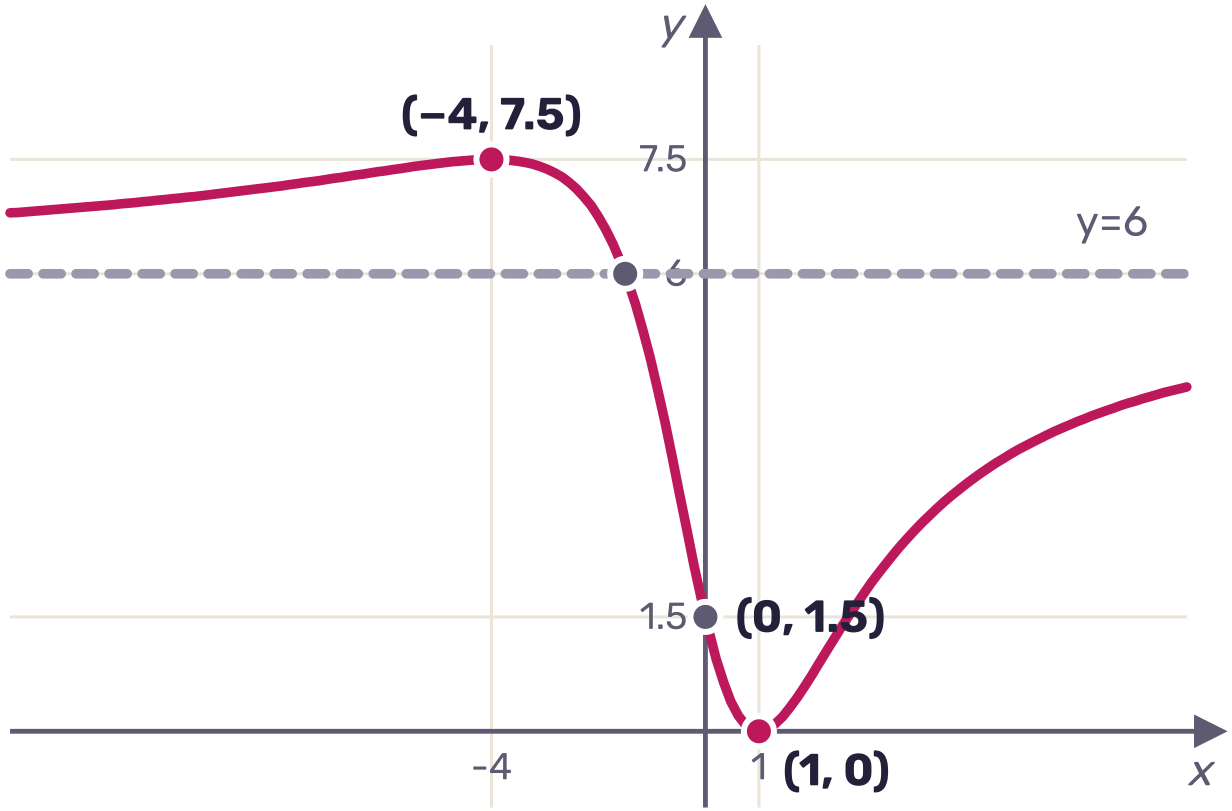
$$\frac{6(a+1)}{a}=7.5\ \Rightarrow\ 1.5a=6\ \Rightarrow\ a=4$$

סקיצה (ד)

עבור $a=4$: $f(x)=\dfrac{6(x-1)^2}{x^2+4}$

- מקסימום $(-4,\ 7.5)$, מינימום $(1,0)$ – הגרף משיק לציר ה־x
- חיתוך עם ציר ה־y: $f(0)=1.5$
- אסימפטוטה $y=6$, והגרף חותך אותה ב־$x=-1.5$
- $f(x)\geq 0$ לכל x

חיתוך עם האסימפטוטה: $6(x-1)^2=6(x^2+4)$ ← $x=-1.5$. משמאל הגרף מתקרב ל־6 מלמעלה, ומימין – מלמטה.



שטח בעזרת פונקציה קדומה (ה)

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד ב' • שאלה 6

$g(x)=\dfrac{-f'(x)}{(f(x))^2}$. חשבו את השטח בין גרף g לציר ה־x בתחום $-4\le x\le 0$.

„רואים" נגזרת של מנה: $\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)'=\dfrac{-f'(x)}{f^2(x)}=g(x)$

כלומר $\frac{1}{f(x)}$ פונקציה קדומה של g. הסימן של g הפוך לסימן של f', ולכן בתחום הזה $g>0$:

$$S=\int_{-4}^{0} g(x)\,dx=\left[\frac{1}{f(x)}\right]_{-4}^{0}$$
$$=\frac{1}{1.5}-\frac{1}{7.5}=\frac{2}{3}-\frac{2}{15}=\frac{8}{15}$$

יחידות שטח $\frac{8}{15}$

כשהאינטגרל נראה קשה

מחפשים ביטוי שהוא **נגזרת** של משהו שכבר יש בשאלה: $\frac{-f'}{f^2}$, $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$, $u'\cdot u^n$…

ואז לפי הנוסחאון: $\int f[u(x)]\,u'(x)\,dx=F[u(x)]+C$

מגרף f' אל f

בגרף של f'	המשמעות ל־f
מעל ציר ה־x $(f' > 0)$	f עולה
מתחת לציר $(f' < 0)$	f יורדת
חותך את הציר ומחליף סימן	נקודת קיצון של f
משיק לציר בלי להחליף סימן	פיתול עם משיק אופקי
נקודת קיצון של f'	נקודת פיתול של f

שטח מתחת לגרף של f'

f היא פונקציה קדומה של f', ולכן:

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

כך מוצאים שינוי בגובה של f מתוך שטח בגרף הנגזרת – שאלה שחוזרת בשאלה 1.

בעיית קיצון – שלב אחרי שלב

1. כותבים את שיעורי הנקודות בעזרת t (נקודה על גרף: $(t, f(t))$).
2. מבטאים את הגודל המבוקש (אורך, שטח, סכום) כפונקציה של t.
3. קובעים את **התחום** של t.
4. גוזרים, משווים ל־0.
5. טבלת סימנים ← מקסימום או מינימום.
6. עונים על השאלה (t, הנקודה, או הערך המקסימלי).

קטע מקביל לציר

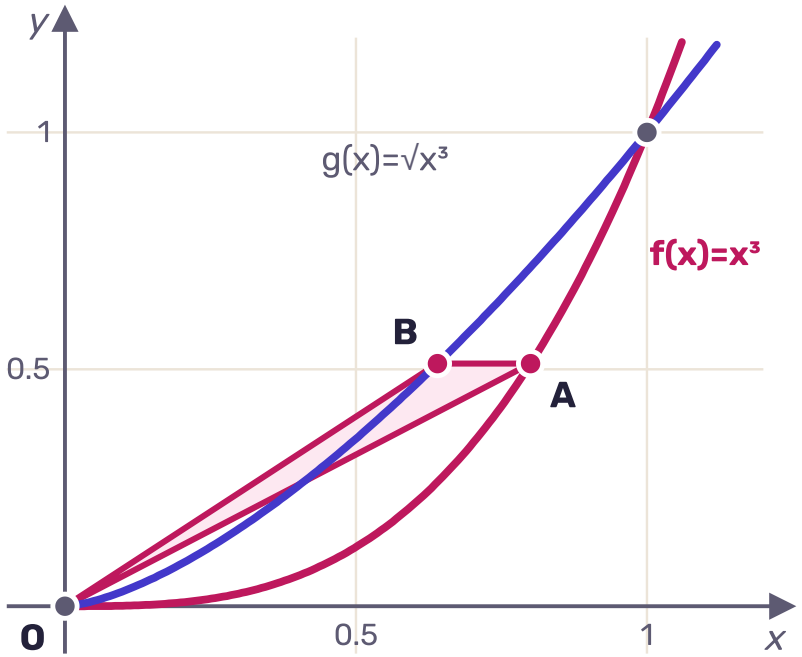
מקביל לציר ה־x: לשתי הנקודות אותו y. האורך = ה־x של הימנית פחות ה־x של השמאלית.

מקביל לציר ה־y: אותו x. האורך = ה־y של העליונה פחות ה־y של התחתונה.

שאלת בגרות פתורה – בעיית קיצון

בגרות קיץ תשפ"ב (2022) – מועד א' • שאלה 8

נתונות הפונקציות $f(x)=x^3$ ו־$g(x)=\sqrt{x^3}$. הנקודה A על גרף f, ושיעור ה־x שלה הוא t (כאשר $0<t<1$). הנקודה B על גרף g, ו־AB מקביל לציר ה־x. מצאו את השטח המקסימלי של המשולש OAB.



ב. הנקודה $A(t,t^3)$. ל־B אותו שיעור y:

$$\sqrt{x^3}=t^3 \;\Rightarrow\; x^3=t^6 \;\Rightarrow\; x=t^2$$

כי $t^2<t$, האורך הוא $AB=t-t^2$

ג. הגובה מ־O ל־AB הוא t^3:

$$S(t)=\frac{1}{2}(t-t^2)\,t^3=\frac{t^4-t^5}{2}$$

$$S'(t)=\frac{t^3(4-5t)}{2}=0 \;\Rightarrow\; t=\frac{4}{5}$$

משמאל ל־$\frac{4}{5}$ $S'>0$, ומימין $S'<0$ ← מקסימום.

$$S\left(\frac{4}{5}\right)=\frac{128}{3125}=0.04096$$

שימו לב – הטעויות הנפוצות

1. בנגזרת מנה: **מונה הנגזרת** – „נגזרת העליון כפול התחתון **פחות**...". כדאי להוציא גורם משותף.
2. בשורש – לא לשכוח **נגזרת פנימית**.
3. טבלת סימנים כוללת גם נקודות שבהן f לא מוגדרת.
4. שטח מתחת לציר יוצא שלילי באינטגרל – מחלקים לקטעים.
5. אחרי העלאה בריבוע – **בודקים** את הפתרונות במשוואה המקורית.
6. בבעיית קיצון – מוכיחים שזה מקסימום (טבלה), ובודקים את תחום t.

בדיקה עצמית

$$f(x)=\frac{x^2}{x-1}$$

1. מצאו את תחום ההגדרה ואת האסימפטוטה האנכית.
2. האם יש אסימפטוטה אופקית?
3. מצאו את נקודות הקיצון וקבעו את סוגן.
4. חשבו את השטח בין הגרף של $y=\sqrt{x}$, ציר ה־x והישר $x=4$.
5. מצאו את הנגזרת של $y=\sqrt{x^2+5}$.

התשובות (לפתוח אחרי שפתרתם)

1. $x\neq 1$; אסימפטוטה $x=1$
2. לא – מעלת המונה גדולה ממעלת המכנה
3. $f'(x)=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$
   מקסימום $(0,0)$, מינימום $(2,4)$
4. $\int_0^4 \sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}\cdot 8=\frac{16}{3}$
5. $\frac{x}{\sqrt{x^2+5}}$