גאומטרייה

מצגת הסבר – מעגלים, דמיון משולשים ויחסי שטחים

מתמטיקה 5 יח״ל | שאלון 35571 | תכנית חדשה

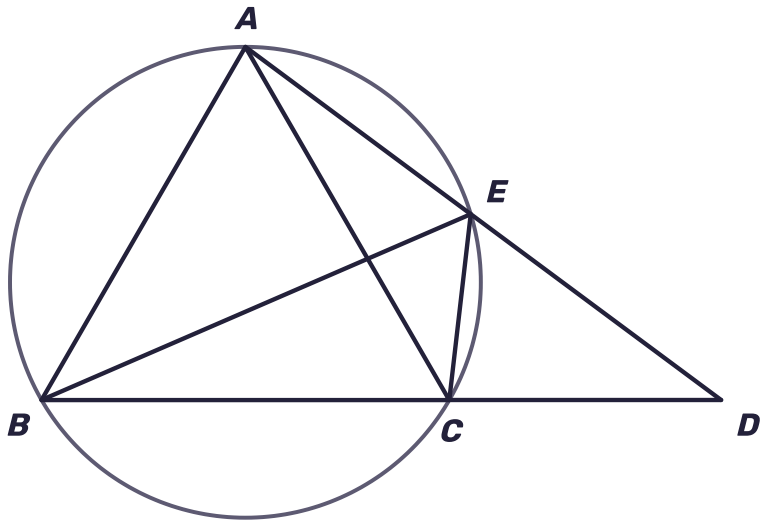
האתר נבנה ע״י עדי והבינה

מה נלמד?

בבחינה זו **שאלה 4**. כמעט תמיד יש סרטוט עם **מעגל**, ושלושה סוגי סעיפים:

1. **הוכחה** של זוויות שוות / ישרים מקבילים / קוטר
2. **דמיון משולשים** – ובעזרתו יחס צלעות
3. **חישוב**: יחס שטחים, אורך צלע (לפעמים עם משפט הקוסינוסים)

סעיף שמשתמש בסעיף קודם – מותר להשתמש בו גם אם לא הוכחתם אותו.



בגרות קיץ תשפ"ו מועד ב׳

איך כותבים הוכחה: טענה | נימוק

1. מסמנים בסרטוט את כל הנתונים (זוויות, צלעות שוות, משיקים).
2. כל שורה: **טענה** אחת ו**נימוק** אחד – משפט, הגדרה, „נתון" או „הוכח בסעיף...".
3. שורה אחרונה = מה שביקשו להוכיח.

טענה	נימוק
$\angle ACB = 60^\circ$	משולש שווה צלעות
$\angle AEB = \angle ACB$	זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת שוות
$\angle AEB = 60^\circ$	מעבר

את הנימוקים כותבים כמשפט מלא, למשל: „זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת שוות זו לזו".

משפטים במעגל שחוזרים בכל בחינה

זוויות

- זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת שוות.
- זווית מרכזית שווה לפעמיים זווית היקפית הנשענת על אותה קשת.
- זווית היקפית הנשענת על קוטר היא 90° (ולהפך: זווית היקפית ישרה ← נשענת על קוטר).

משיקים

- רדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה.
- שני משיקים ממקור אחד – קטעי המשיקים שווים.
- הזווית בין משיק למיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על המיתר מהצד השני.

מרובע חסום

- סכום זוויות נגדיות 180°.
- זווית חיצונית שווה לזווית הפנימית שמולה.

משולש שווה שוקיים

- שני רדיוסים באותו מעגל ← משולש שווה שוקיים ← זוויות הבסיס שוות.

דמיון משולשים ויחסי שטחים

משפטי דמיון

ז.ז. – שתי זוויות שוות (הכי נפוץ בבחינה)

צ.ז.צ. – יחס שתי צלעות שווה והזווית שביניהן שווה

צ.צ.צ. – יחס שלוש הצלעות שווה

כותבים את המשולשים **לפי סדר ההתאמה**: $\triangle AEB \sim \triangle CED \leftarrow A \leftrightarrow C,\ E \leftrightarrow E,\ B \leftrightarrow D$

יחסים

יחס הדמיון k = יחס צלעות מתאימות

יחס השטחים $= k^2$

משולשים עם **אותו גובה** – יחס השטחים = יחס הבסיסים.

תיכון מחלק משולש לשני משולשים שווי שטח.

מהנוסחאון – כשצריך לחשב

נוסחאון • משפט הקוסינוסים

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

(γ – הזווית הכלואה בין a ל־b)

נוסחאון • משפט הסינוסים

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

(R – רדיוס המעגל החוסם)

נוסחאון • שטח משולש

$$S = \frac{1}{2}\,b\,c\,\sin\alpha$$

נוסחאון • מעגל

$$P = 2\pi R \qquad S = \pi R^2$$

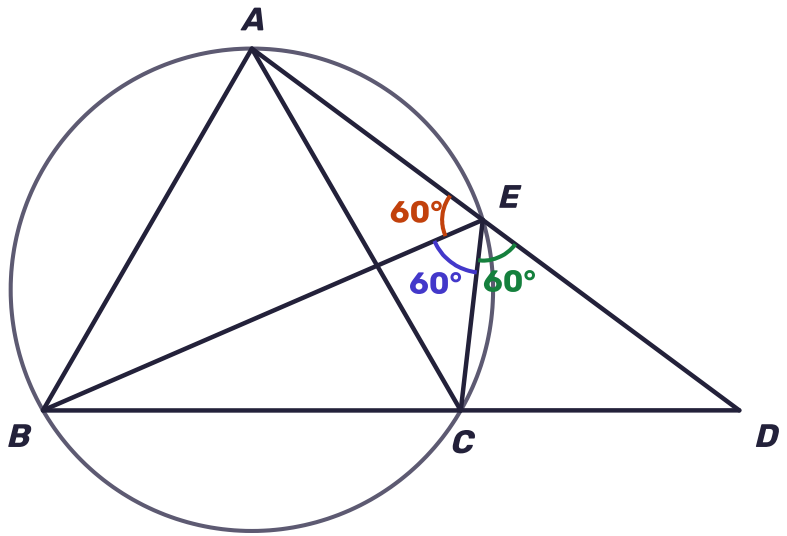
את משפטי הגאומטרייה (זוויות היקפיות, דמיון...) אין בנוסחאון – צריך לדעת אותם בעל פה.

שאלת בגרות פתורה (א)

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד ב' • שאלה 4

משולש שווה צלעות ABC חסום במעגל. D על המשך BC, והקטע AD חותך את המעגל ב־E. הוכיחו: $\angle AEB = \angle BEC = \angle CED$

טענה	נימוק
כל זוויות $\triangle ABC$ הן 60°	משולש שווה צלעות
$\angle AEB = \angle ACB = 60^\circ$	היקפיות על הקשת AB
$\angle BEC = \angle BAC = 60^\circ$	היקפיות על הקשת BC
$\angle AEC = 120^\circ$	מרובע חסום $ABCE$: זוויות נגדיות 180°
$\angle CED = 60^\circ$	זוויות צמודות

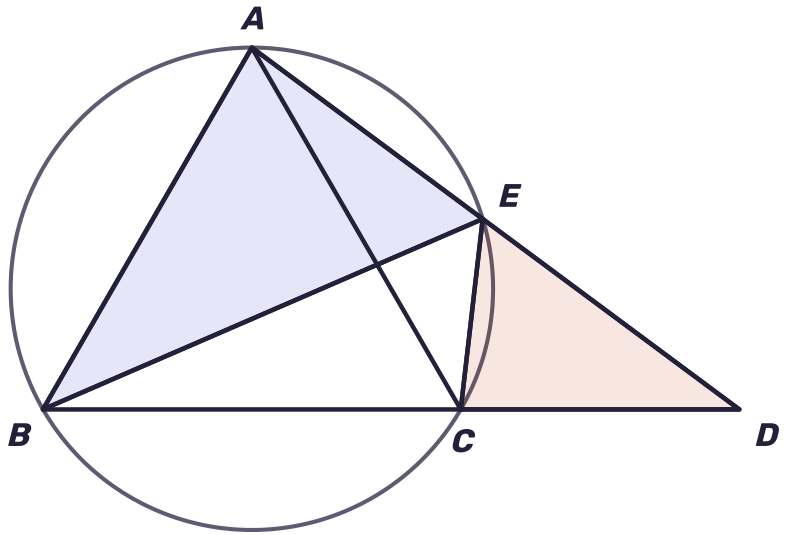


שאלת בגרות פתורה (ב, ג) – דמיון

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד ב' • שאלה 4

ב הוכיחו: $\triangle AEB \sim \triangle CED$

טענה	נימוק
$\angle AEB = \angle CED$	הוכח בסעיף א
$\angle BAE + \angle BCE = 180^\circ$	מרובע חסום $ABCE$
$\angle ECD + \angle BCE = 180^\circ$	זוויות צמודות
$\angle ECD = \angle BAE$	משתי הטענות הקודמות
$\triangle AEB \sim \triangle CED$	ז.ז.



$A \leftrightarrow C \quad E \leftrightarrow E \quad B \leftrightarrow D$

ג הוכיחו: $\frac{AE}{CE} = \frac{BC}{CD}$

מהדמיון (יחס צלעות מתאימות):

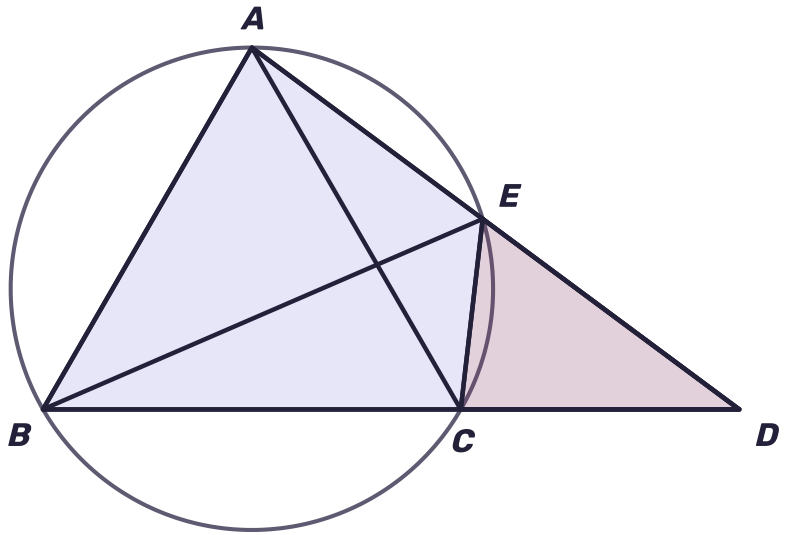
$$\frac{AE}{CE} = \frac{AB}{CD}$$

ובמשולש שווה צלעות $AB = BC$.

שאלת בגרות פתורה (ד) – יחס שטחים

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד ב' • שאלה 4

שטח $\triangle AEB$ גדול פי 2.25 משטח $\triangle CED$. פי כמה שטח $\triangle ABD$ גדול משטח $\triangle CED$?



יחס השטחים = ריבוע יחס הדמיון:

$$\left(\frac{AB}{CD}\right)^2 = 2.25 \Rightarrow \frac{AB}{CD} = 1.5$$

נסמן $CD = 2x$, ולכן $AB = BC = AC = 3x$.

$\angle D$ משותפת ו־$\angle DCE = \angle DAB$ (סעיף ב), ולכן לפי ז.ז.:

$$\triangle DCE \sim \triangle DAB$$

במשולש ACD הזווית $\angle ACD = 120^\circ$. לפי משפט הקוסינוסים:

$$AD^2 = 9x^2 + 4x^2 - 2 \cdot 3x \cdot 2x \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right) = 19x^2$$

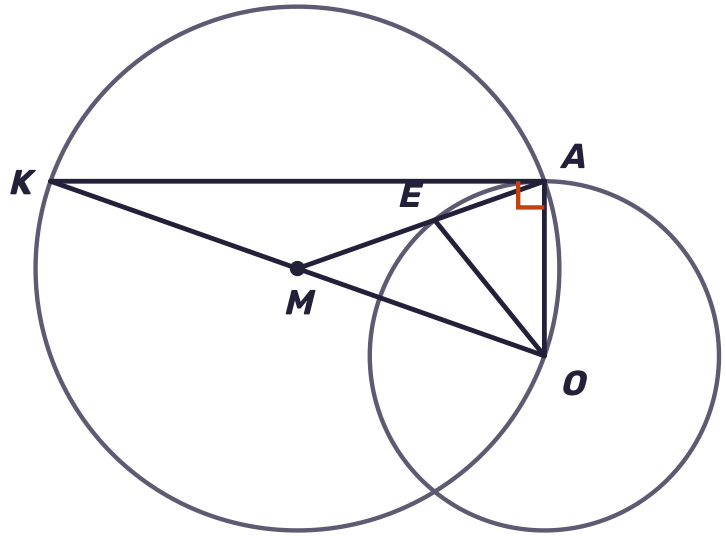
$$\frac{S_{ABD}}{S_{CED}} = \left(\frac{AD}{CD}\right)^2 = \frac{19x^2}{4x^2} = 4.75$$

פי 4.75

דוגמה נוספת: משיק, קוטר ותיכון

בגרות קיץ תשפ"ה (2025) – מועד א' • שאלה 4

מעגל קטן שמרכזו O ורדיוסו r, ומעגל גדול שעובר דרך O. AK משיק למעגל הקטן ב־A. M אמצע OK.



ב למה M מרכז המעגל הגדול?

$\angle OAK = 90°$ (רדיוס מאונך למשיק) ← זווית היקפית ישרה נשענת על קוטר ← OK קוטר ← אמצעו M הוא המרכז.

ד נתון $R = 1.5r$. שטח $\triangle MEO$ הוא S. הביעו את S_{OKA}.

מהדמיון בסעיף ג ($\triangle MOA \sim \triangle OEA$):

$$\frac{1.5r}{r} = \frac{r}{EA} \Rightarrow EA = \frac{2r}{3},\quad ME = \frac{5r}{6}$$

למשולשים MEO ו־MAO אותו גובה מ־O:

$$\frac{S_{MEO}}{S_{MAO}} = \frac{ME}{MA} = \frac{5}{9} \Rightarrow S_{MAO} = \frac{9}{5}S$$

AM תיכון במשולש OKA:

$$S_{OKA} = 2 \cdot \tfrac{9}{5}S = 3.6S$$

שימו לב – הטעויות הנפוצות

1. **אין טענה בלי נימוק** – גם „זוויות צמודות" ו„מעבר" הם נימוקים.
2. „נראה בסרטוט" אינו נימוק.
3. בדמיון – כותבים את **סדר ההתאמה** ובודקים שהצלעות ביחס הן באמת מתאימות.
4. יחס שטחים $= k^2$ – ולהפך: מיחס שטחים מוציאים **שורש** כדי לקבל k.
5. משפט הקוסינוסים: $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$ – הסימן משנה!
6. במרובע חסום: **נגדיות** משלימות ל־180°, לא סמוכות.

בדיקה עצמית

1. זווית מרכזית של 100°. כמה מעלות הזווית ההיקפית הנשענת על אותה קשת?
2. במרובע חסום אחת הזוויות 70°. מה הזווית שמולה?
3. שני משולשים דומים ביחס $2:3$. מה יחס השטחים?
4. יחס השטחים של שני משולשים דומים הוא 2.25. מה יחס הדמיון?
5. לשני משולשים אותו גובה, והבסיסים 4 ו־10. מה יחס השטחים?
6. הזווית בין משיק למיתר היא 35°. מה הזווית המרכזית הנשענת על המיתר?

התשובות (לפתוח אחרי שפתרתם)

1. 50°
2. 110°
3. $4:9$
4. $\sqrt{2.25}=1.5$
5. $4:10=2:5$
6. היקפית 35° ← מרכזית 70°