הסתברות

מצגת הסבר – עץ, הסתברות מותנית וברנולי

מתמטיקה 5 יח"ל | שאלון 35571 | תכנית חדשה

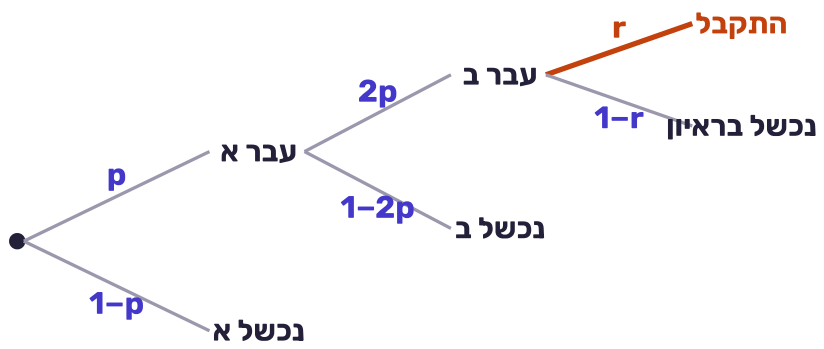
האתר נבנה ע"י עדי והבינה

מה נלמד?

בבחינה זו **שאלה 3**. כמעט בכל מועד מופיעים שלושה כלים:

1. **עץ הסתברויות** – ניסוי בשלבים
2. **הסתברות מותנית** – „בהינתן ש…", „ידוע ש…"
3. **נוסחת ברנולי** – אותו ניסוי חוזר n פעמים

ולפעמים גם: מאורע משלים, מאורעות בלתי תלויים, משוואה עם פרמטר p.



עץ מתוך בגרות קיץ תשפ"ו מועד ב'

מושגים בסיסיים

מאורע משלים

$\bar{A}$ = „A לא קרה".

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

שימושי מאוד ב„לפחות אחד".

חיתוך $A \cap B$

שני המאורעות קרו **יחד** („וגם").

מאורעות בלתי תלויים

קרות האחד לא משנה את ההסתברות של השני:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

איחוד $A \cup B$

לפחות אחד מהם קרה („או"):

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

הנוסחאות מהנוסחאון

נוסחאון • הסתברות מותנית

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

„ההסתברות ש־A קרה, **בהינתן** ש־B קרה"

נוסחאון • נוסחת ברנולי

ההסתברות ל־k הצלחות מתוך n ניסיונות בהתפלגות בינומית, כאשר ההסתברות להצלחה היא p:

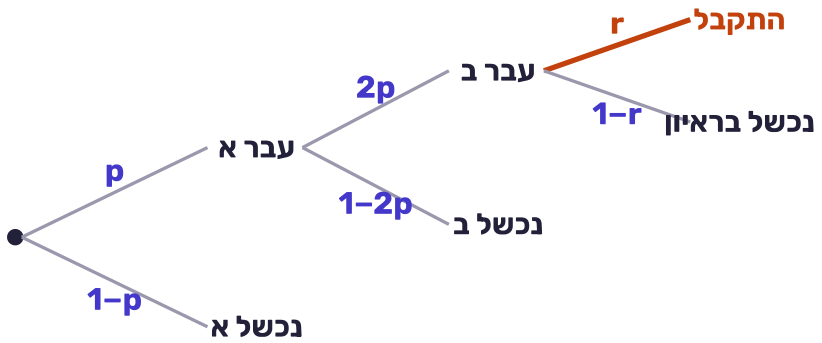
$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k} \qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

שימו לב לסימון: בנוסחאון כותבים $P(A/B)$ – עם קו נטוי.

עץ הסתברויות

1. כל שלב בניסוי = **פיצול** בעץ. על כל ענף כותבים את ההסתברות.
2. הענפים שיוצאים מאותה נקודה – **סכומם 1**.
3. הסתברות של מסלול = **כפל** ההסתברויות לאורכו.
4. כמה מסלולים מתאימים – **מחברים** אותם.

ההסתברות על ענף בשלב השני היא כבר **מותנית**: „לעבור את מבחן ב׳ **בהינתן** שעבר את מבחן א׳" = $2p$.



ההסתברות להתקבל (המסלול המודגש):

$$p \cdot 2p \cdot r = 2p^2 r$$

הסתברות מותנית – שלב אחרי שלב

1. **מגדירים מאורעות** במילים: A – ..., B – ...
2. מזהים מה **ידוע** (זה B, אחרי „בהינתן") ומה **מבוקש**.
3. כותבים את הנוסחה: $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$
4. מחשבים $P(B)$ ו־$P(A \cap B)$ (עץ / ברנולי / טבלה).
5. **מציבים** ומחשבים.

בגרות קיץ תשפ"ד (2024) – מועד א' • שאלה 3

מבחן של 5 שאלות, $p = 0.7$ לתשובה נכונה. שאלה מספר i שווה i נקודות. ידוע שענתה נכון בדיוק על 3 שאלות. מה ההסתברות שצברה בדיוק 6 נקודות?

A – צברה בדיוק 6 נקודות; B – ענתה נכון על 3 שאלות בדיוק.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(B) = \binom{5}{3} \cdot 0.7^3 \cdot 0.3^2 = 0.3087$$

$A \cap B$: רק השאלות $1, 2, 3$ נכונות: $0.7^3 \cdot 0.3^2 = 0.03087$

$$P(A/B) = \frac{0.03087}{0.3087} = 0.1$$

נוסחת ברנולי – מתי ואיך?

מתי?

- אותו ניסוי חוזר n פעמים
- בכל פעם: **הצלחה** או **כישלון**
- הסתברות ההצלחה p **זהה** בכל ניסיון
- הניסיונות **בלתי תלויים**
- שואלים על **מספר** ההצלחות k (לא על הסדר)

בגרות קיץ תשפ"ד (2024) – מועד א' • שאלה 3

5 שאלות, $p = 0.7$. מה ההסתברות שתענה נכון על 3 בדיוק?

$n = 5,\ k = 3,\ p = 0.7$:

$$P_5(3) = \binom{5}{3} \cdot 0.7^3 \cdot 0.3^2$$

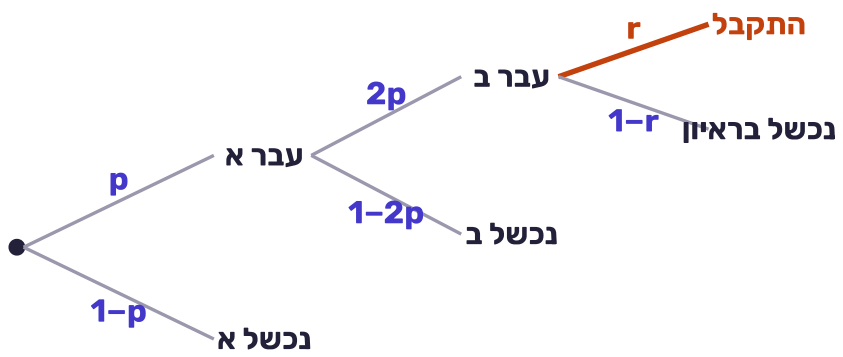
$$= 10 \cdot 0.343 \cdot 0.09 = 0.3087$$

„לפחות" – לרוב קצר יותר דרך המשלים: $P(\geq 2) = 1 - P_n(0) - P_n(1)$. **„לכל היותר 4 מתוך 5"** = $1 - P_5(5)$.

שאלת בגרות פתורה – בניית העץ (א)

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד ב' • שאלה 3

כדי להתקבל לעבודה צריך לעבור מבחן א', מבחן ב' וראיון. ההסתברות לעבור את מבחן ב' (למי שעבר את א') גדולה פי 2 מההסתברות לעבור את מבחן א'. ההסתברות לעבור את כל השלבים גדולה פי 3 מההסתברות לעבור את שני המבחנים ולהיכשל בראיון. **א.** מה ההסתברות לעבור את הראיון, למי שעבר את שני המבחנים?



p – לעבור את מבחן א', $2p$ – את מבחן ב', r – את הראיון.

$$2p^2 r = 3 \cdot 2p^2(1-r)$$

$$r = 3 - 3r \;\Rightarrow\; 4r = 3$$

$$r = 0.75$$

שאלת בגרות פתורה (ב, ג)

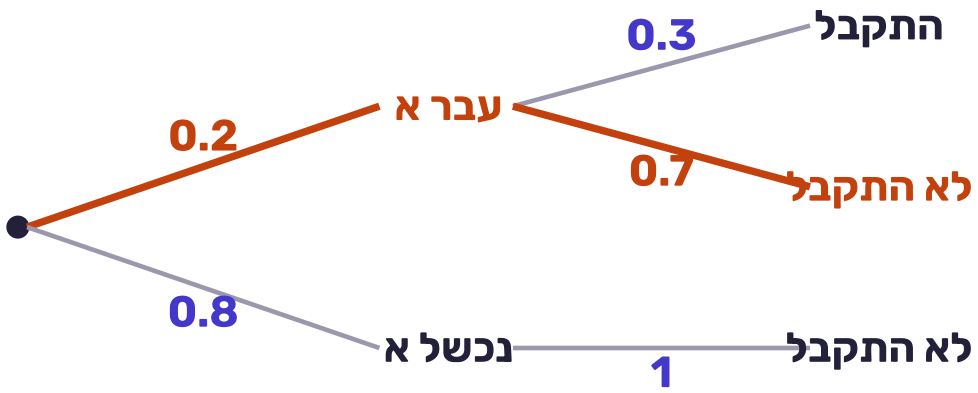
בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד ב' • שאלה 3

ב ידוע שההסתברות להתקבל היא 0.06. מצאו את p.

$$p \cdot 2p \cdot 0.75 = 1.5p^2 = 0.06$$

$$p^2 = 0.04 \Rightarrow p = 0.2$$

(p הסתברות, ולכן חיובית.)



ג מועמד לא התקבל. מה ההסתברות שעבר את מבחן א'?

A – עבר את מבחן א'; N – לא התקבל לעבודה.

$$P(A/N) = \frac{P(A \cap N)}{P(N)}$$

$$P(N) = 1 - 0.06 = 0.94$$

$$P(A \cap N) = 0.2 - 0.06 = 0.14$$

$$P(A/N) = \frac{0.14}{0.94} = \frac{7}{47}$$

בערך 0.149

שאלת בגרות פתורה (ד) – ברנולי

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד ב' • שאלה 3

נבחרו באקראי 5 מועמדים שלא התקבלו. מה ההסתברות שלפחות 2 מהם עברו את מבחן א'?

לכל מועמד, בלי תלות באחרים: הצלחה = עבר את מבחן א', $p = \frac{7}{47}$ (מסעיף ג). $n = 5$.

$$P_5(0) = \left(\frac{40}{47}\right)^5 \approx 0.4465$$

$$P_5(1) = \binom{5}{1} \cdot \frac{7}{47} \cdot \left(\frac{40}{47}\right)^4 \approx 0.3907$$

$$P(\geq 2) = 1 - P_5(0) - P_5(1) \approx 0.163$$

בערך 0.163

למה ברנולי?

5 ניסיונות זהים ובלתי תלויים, בכל אחד „עבר א'" או „לא", ושואלים **כמה** עברו.

למה משלים?

„לפחות 2" = 2, 3, 4 או 5 – ארבעה חישובים.
המשלים (0 או 1) – רק שניים.

דוגמה נוספת: משלים ופרמטר

בגרות קיץ תשפ"ד (2024) – מועד א' • שאלה 3

א ההסתברות שתענה נכון על 4 שאלות **לכל היותר** (מתוך 5) היא 0.83193. מצאו את P – ההסתברות לענות נכון על שאלה.

המשלים של „לכל היותר 4" הוא „כל 5 נכונות":

$$1 - P^5 = 0.83193$$

$$P^5 = 0.16807 \;\Rightarrow\; P = \sqrt[5]{0.16807} = 0.7$$

ג שאלה i שווה i נקודות. מה ההסתברות לצבור **לפחות 14** נקודות?

המקסימום $1+2+3+4+5 = 15$. 15 – הכול נכון; 14 – הכול חוץ משאלה 1:

$$0.7^5 + 0.3 \cdot 0.7^4$$

$$= 0.16807 + 0.07203 = 0.2401$$

כאן **הסדר** חשוב (איזו שאלה) – לכן לא ברנולי אלא כפל ישיר.

שימו לב – הטעויות הנפוצות

1. **„בהינתן"** = הסתברות מותנית. מגדירים מאורעות וכותבים את הנוסחה.
2. במכנה – המאורע **הידוע**: $P(A/B) \leftarrow$ מחלקים ב־$P(B)$.
3. על ענף בשלב השני רושמים הסתברות **מותנית**.
4. ברנולי רק כשהסדר **לא** חשוב. כשמבקשים סדר מסוים – כפל ישיר, בלי $\binom{n}{k}$.
5. „לפחות אחד" $\leftarrow 1 - P_n(0)$.
6. פתרון של משוואה ב־p: הסתברות היא בין 0 ל־1 – פוסלים פתרון שלילי.

בדיקה עצמית

שחקן קולע זריקת עונשין בהסתברות 0.8, בלי תלות בין הזריקות. הוא זורק 4 זריקות.

1. מה ההסתברות שיקלע בדיוק 3 פעמים?

2. מה ההסתברות שיחטיא לפחות פעם אחת?

3. ידוע שקלע בדיוק 3 פעמים. מה ההסתברות שההחטאה הייתה בזריקה הראשונה?

30% מהתלמידים מגיעים באוטובוס. מהם 10% מאחרים, ומהשאר 5% מאחרים.

4. מה ההסתברות שתלמיד מאחר?

5. תלמיד איחר. מה ההסתברות שהגיע באוטובוס?

התשובות (לפתוח אחרי שפתרתם)

1. $\binom{4}{3} \cdot 0.8^3 \cdot 0.2 = 0.4096$ **0.4096**

2. $1 - 0.8^4 = 0.5904$ **0.5904**

3. A – החטיא בראשונה, B – קלע בדיוק 3.
$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.2 \cdot 0.8^3}{0.4096} =$ **0.25**

4. $0.3 \cdot 0.1 + 0.7 \cdot 0.05 = 0.065$ **0.065**

5. A – באוטובוס, B – איחר.
$P(A/B) = \frac{0.03}{0.065} = \frac{6}{13} \approx$ **0.462**