סדרות ואינדוקצייה

מצגת הסבר – חשבונית, הנדסית וסכום אין־סופי

מתמטיקה 5 יח״ל | שאלון 35571 | תכנית חדשה

האתר נבנה ע״י עדי והבינה

מה נלמד?

בבחינה זו **שאלה 2**. רוב השאלות בנויות כך:

1. נתונה סדרה (לרוב **הנדסית**) עם פרמטר
2. בונים ממנה **סדרה חדשה** ומוכיחים שהיא הנדסית או חשבונית
3. **סכום** – של n איברים או של סדרה אין־סופית
4. מוחקים / הופכים סימן לחלק מהאיברים ומחשבים שוב

הכלי הכי חשוב

להוכיח ש־b_n הנדסית: מראים שהמנה

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}$$

קבועה

להוכיח ש־b_n חשבונית: מראים שההפרש

$$b_{n+1} - b_n$$

קבוע

(קבוע = לא תלוי ב־n)

ולפעמים: הוכחה של נוסחת סכום **באינדוקציה** (שקף 9). עוד אינדוקציה – בשאלה 1, במצגת „שאלות קצרות".

הנוסחאות מהנוסחאון

סדרה חשבונית

כלל נסיגה: $a_1 = a,\quad a_{n+1} = a_n + d$

האיבר ה־n־י:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

סכום:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n\left[2a_1 + (n-1)d\right]}{2}$$

סדרה הנדסית

כלל נסיגה: $a_1 = a,\quad a_{n+1} = a_n \cdot q$

האיבר ה־n־י:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

סכום ($q \neq 1$):

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

סכום סדרה אין־סופית שסכומה מתכנס:

$$S = \frac{a_1}{1 - q}$$

להוכיח שסדרה חדשה היא הנדסית

1. כותבים את b_n בעזרת a_n ו־q (בעזרת $a_{n+1} = a_n q$).
2. כותבים גם את b_{n+1}.
3. מחשבים את המנה $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ ומצמצמים.
4. יצא מספר שלא תלוי ב־n ← הנדסית, וזו המנה.

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד ב' • שאלה 2

a_n הנדסית עם מנה q, $b_n = a_n + a_{n+1} + a_{n+2}$

$$b_n = a_n + a_n q + a_n q^2 = a_n(1 + q + q^2)$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{n+1}(1 + q + q^2)}{a_n(1 + q + q^2)} = \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

המנה קבועה ← b_n הנדסית עם מנה q

עולה, יורדת, או לא זה ולא זה?

המנה q	$a_1 > 0$	$a_1 < 0$
$q > 1$	עולה	יורדת
$0 < q < 1$	יורדת	עולה
$q < 0$	הסימנים מתחלפים – לא עולה ולא יורדת	

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד ב' • שאלה 2

כל האיברים חיוביים והסדרה יורדת. מה התחום של q?

האיברים חיוביים ← $q = \frac{a_{n+1}}{a_n} > 0$

יורדת ← $a_{n+1} < a_n$, מחלקים ב־$a_n > 0$:

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$$

$$0 < q < 1$$

נימוק מלא תמיד עובר דרך a_{n+1} מול a_n – לא רק „לפי הטבלה".

סכום של סדרה הנדסית אין־סופית

התנאי להתכנסות

$$-1 < q < 1, \qquad q \neq 0$$

ורק אז מותר: $S = \dfrac{a_1}{1-q}$

כששואלים „מצאו את תחום הערכים של הפרמטר" – מציבים את המנה (שתלויה בפרמטר) בתנאי.

בגרות חורף תשפ"ה (2025) • שאלה 2

המנה של B היא $\frac{k}{2}$ ($k \neq 0$), וסכומה מתכנס:

$$-1 < \frac{k}{2} < 1 \;\Rightarrow\; -2 < k < 2$$

ובלי $k = 0$:

$$-2 < k < 0 \text{ או } 0 < k < 2$$

נתון: המנה $\frac{1}{4}$ והסכום -9:

$$\frac{b_1}{1-\frac{1}{4}} = -9 \;\Rightarrow\; b_1 = -\frac{27}{4}$$

מחיקת איברים – תת־סדרה

האיברים במקומות **הזוגיים** $a_2, a_4, a_6, \ldots$ הם סדרה הנדסית עם מנה q^2.

כל איבר **שלישי** $a_3, a_6, a_9, \ldots$ – מנה q^3.

סכום הנותרים = סכום הכול פחות סכום הנמחקים.

בגרות חורף תשפ"ה (2025) • שאלה 2

בסדרה B (שבה $S=-9$, $q=\frac{1}{4}$) מחקו כל איבר שלישי. מה סכום האיברים הנותרים?

$$b_3 = b_1 q^2 = -\frac{27}{4}\cdot\frac{1}{16} = -\frac{27}{64}$$

המנה של הנמחקים: $q^3 = \frac{1}{64}$

סכום הנמחקים:

$$\frac{-\frac{27}{64}}{1-\frac{1}{64}} = -\frac{27}{63} = -\frac{3}{7}$$

$$-9-\left(-\frac{3}{7}\right) = -\frac{60}{7}$$

סכום הנותרים: $-8\frac{4}{7}$

הוכחה באינדוקציה

1. **בדיקה:** מציבים $n=1$ בשני האגפים ומראים שווים.
2. **הנחה:** „נניח שהטענה נכונה עבור $n=k$" – כותבים אותה.
3. **צעד:** כותבים מה צריך להוכיח עבור $n=k+1$.
4. באגף שמאל מזהים את הסכום עד k ← מחליפים לפי ההנחה ומפשטים עד אגף ימין.
5. מסיימים: „לפי עקרון האינדוקציה הטענה נכונה לכל n טבעי".

בגרות חורף תשפ"ו (2026) • שאלה 2

$b_n=16^{n-1}$. הוכיחו: $b_1+\cdots+b_n=\frac{16^n-1}{15}$

בדיקה: $b_1=1$, $\frac{16-1}{15}=1$ ✓

הנחה: $b_1+\cdots+b_k=\frac{16^k-1}{15}$

צעד: לפי ההנחה,

$$b_1+\cdots+b_k+b_{k+1}=\frac{16^k-1}{15}+16^k$$

$$=\frac{16^k-1+15\cdot 16^k}{15}=\frac{16^{k+1}-1}{15}$$

באתר גם דרך ב': b_n הנדסית עם $q=16$ ← נוסחת S_n.

שאלת בגרות פתורה (ב, ג)

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד ב' • שאלה 2

a_n סדרה הנדסית אין־סופית יורדת שכל איבריה חיוביים. $b_n = a_n + a_{n+1} + a_{n+2}$. נתון: סכום הסדרה b_n גדול פי 1.96 מסכום הסדרה a_n. מצאו את q.

מסעיף ב: b_n הנדסית עם אותה מנה q, ו־$b_1 = a_1(1+q+q^2)$.

$$S_b = \frac{b_1}{1-q} = \frac{a_1(1+q+q^2)}{1-q}$$

$$S_b = (1+q+q^2)\cdot S_a$$

$$1+q+q^2 = 1.96$$

$$q^2+q-0.96=0$$

$$q = \frac{-1 \pm \sqrt{1+3.84}}{2} = \frac{-1 \pm 2.2}{2}$$

$q = 0.6$ או $q = -1.6$. לפי סעיף א: $0 < q < 1$.

$$q = 0.6$$

שאלת בגרות פתורה (ד, ה)

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד ב' • שאלה 2

ד $c_n = \dfrac{b_n}{4a_n}$. הוכיחו שכל האיברים שווים, ומצאו k כך שסכום k האיברים הראשונים הוא 34.79.

$$c_n = \frac{a_n(1+q+q^2)}{4a_n} = \frac{1.96}{4} = 0.49$$

לא תלוי ב־n ← כל האיברים שווים.

$$0.49k = 34.79 \;\Rightarrow\; k = 71$$

ה הופכים את הסימן של האיברים במקומות הזוגיים. מה סכום 71 האיברים הראשונים?

במקומות האי־זוגיים 0.49, ובזוגיים -0.49. ב־71 מקומות: 36 אי־זוגיים ו־35 זוגיים.

$$36 \cdot 0.49 - 35 \cdot 0.49 = 0.49$$

$$0.49$$

כל זוג מתאפס, ונשאר רק האיבר ה־71.

שימו לב – הטעויות הנפוצות

1. $S=\frac{a_1}{1-q}$ רק כש־$-1<q<1$. בודקים את התנאי **לפני** שמציבים.
2. במשוואה ריבועית ב־q – פוסלים פתרון שלא מתאים לנתונים (כמו $q=-1.6$).
3. $a_n=a_1q^{n-1}$ – החזקה $n-1$, לא n.
4. תת־סדרה של כל איבר k־י: המנה q^k, והאיבר הראשון שלה הוא האיבר ה־k, לא a_1.
5. „הוכיחו שהסדרה הנדסית" – מראים מנה **שלא תלויה ב־**n.
6. סופרים מקומות בזהירות: ב־71 איברים יש 36 אי־זוגיים.

בדיקה עצמית

סדרה הנדסית אין־סופית שבה $a_1 = 48,\ q = \frac{1}{2}$

1. מצאו את a_5 ואת S_5.
2. מצאו את סכום כל הסדרה.
3. מה סכום האיברים במקומות הזוגיים?
4. הוכיחו ש־$b_n = a_n \cdot a_{n+1}$ סדרה הנדסית, ומצאו את מנתה.

סדרה חשבונית שבה $a_1 = 5,\ d = 3$

5. מצאו את a_{20} ואת S_{20}.

התשובות (לפתוח אחרי שפתרתם)

1. $a_5 = 48 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 3$

$$S_5 = \frac{48\left(\left(\frac{1}{2}\right)^5 - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = 93$$

2. $S = \frac{48}{1 - \frac{1}{2}} = 96$
3. $a_2 = 24$, המנה $\frac{1}{4}$: $\frac{24}{1 - \frac{1}{4}} = 32$
4. $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{n+1}a_{n+2}}{a_n a_{n+1}} = q^2 = \frac{1}{4}$
5. $a_{20} = 5 + 19 \cdot 3 = 62$

$$S_{20} = \frac{20(5+62)}{2} = 670$$