שאלות קצרות

מצגת הסבר – אינדוקציה, גרפים של פונקציה ונגזרות, ושטח

מתמטיקה 5 יח״ל | שאלון 35571 | תכנית חדשה

האתר נבנה ע״י עדי והבינה

מה זו שאלה 1?

שאלה 1 בנויה מכמה סעיפים קצרים (לרוב 4), כל אחד מנושא אחר. מה חוזר הכי הרבה ב־17 המועדים שבאתר:

סוג הסעיף	בכמה מועדים
הוכחה באינדוקציה (סכום / התחלקות)	13 מתוך 17
משיק, אסימפטוטה, התאמת גרף לביטוי	כמעט בכל מועד
שטח / פונקציה קדומה	11 מתוך 17
גרפים של f, f', f'' ונקודות פיתול	6 מתוך 17
הוכחה קצרה בגאומטרייה	בחלק מהמועדים

איך ניגשים

כל סעיף קצר – אבל הנימוק חייב להיות מלא.
מתחילים מהסעיף שהכי בטוחים בו.

אינדוקציה = נקודות „בטוחות": התבנית תמיד אותה תבנית.

הוכחה באינדוקציה – התבנית

1. **בדיקה:** מציבים את הערך הראשון ($n=1$, או מה שנתון) ומראים שהטענה נכונה.
2. **הנחה:** „נניח שהטענה נכונה עבור $n=k$" – כותבים אותה במפורש.
3. **צעד:** כותבים מה צריך להוכיח עבור $n=k+1$.
4. משתמשים **בהנחה** בתוך אגף שמאל ומפשטים עד שמקבלים את אגף ימין.
5. סיום: „לפי עקרון האינדוקציה הטענה נכונה לכל n טבעי".

שני סוגים

סכום: אגף שמאל עד $k+1$ = (הסכום עד k) + המחובר האחרון.

התחלקות: כותבים את הביטוי עבור $k+1$ בעזרת הביטוי עבור k (שמתחלק לפי ההנחה) ועוד מחובר שמתחלק.

טיפ: בצעד מוציאים **גורם משותף** במקום לפתוח הכול.

אינדוקציה – סכום

בגרות קיץ תשפ"ה (2025) – מועד א' • שאלה 1

הוכיחו שלכל n טבעי:

$$2^2+4^2+\cdots+(2n)^2=\frac{2n(2n+1)(n+1)}{3}$$

בדיקה: אגף שמאל $2^2=4$; אגף ימין:

$$\frac{2\cdot1\cdot3\cdot2}{3}=4\ \checkmark$$

הנחה עבור $n=k$:

$$2^2+\cdots+(2k)^2=\frac{2k(2k+1)(k+1)}{3}$$

צעד: לפי ההנחה, אגף שמאל עבור $n=k+1$:

$$\begin{aligned}&\frac{2k(2k+1)(k+1)}{3}+4(k+1)^2\\&=\frac{2(k+1)}{3}\big[k(2k+1)+6(k+1)\big]\\&=\frac{2(k+1)}{3}(2k^2+7k+6)\\&=\frac{2(k+1)(2k+3)(k+2)}{3}\end{aligned}$$

זה אגף ימין עבור $n=k+1$ ✓

א (2). $4^2+\cdots+100^2$: $n=50$ פחות 2^2:

$$\frac{2\cdot50\cdot101\cdot51}{3}-4=171{,}696$$

אינדוקציה – התחלקות

בגרות קיץ תשפ"ב (2022) – מועד א' • שאלה 1

הוכיחו ש־$4^n - 1$ מתחלק ב־3 לכל n טבעי.

בדיקה: $4^1 - 1 = 3$ ✓

הנחה: $4^k - 1$ מתחלק ב־3.

צעד: צריך להראות ש־$4^{k+1} - 1$ מתחלק ב־3:

$$4^{k+1} - 1 = 4 \cdot 4^k - 4 + 3 = 4(4^k - 1) + 3$$

$4(4^k - 1)$ מתחלק ב־3 לפי ההנחה, וגם 3 מתחלק ב־3 ← הסכום מתחלק ב־3.

הטריק

„מוסיפים ומחסירים" כדי שיופיע הביטוי מההנחה:

$$4 \cdot 4^k - 1 = 4 \cdot 4^k - 4 + 3$$

גרפים של $f,\ f',\ f''$

ב־f	ב־f'	ב־f''
עולה	חיובית	
קיצון	מתאפסת ומחליפה סימן	
קעורה כלפי מעלה	עולה	חיובית
פיתול	נקודת קיצון	מתאפסת ומחליפה סימן

בגרות קיץ תשפ"ה (2025) – מועד א' • שאלה 1

נתונים שלושה גרפים: $f,\ f',\ f''$. חשבו את השטח בין f' ל־f'' בתחום $0 \le x \le a$ (ב־$x=a$ מקסימום של f).

גרף f' מעל גרף f'', ו־f קדומה של f', f' קדומה של f'':

$$S=\int_0^a \left(f'-f''\right)dx=\Big[f(x)-f'(x)\Big]_0^a$$

מהגרפים: $f(a)=5,\ f'(a)=0,\ f(0)=4,\ f'(0)=2$

$$S=(5-0)-(4-2)=3$$

התאמת גרף לביטוי

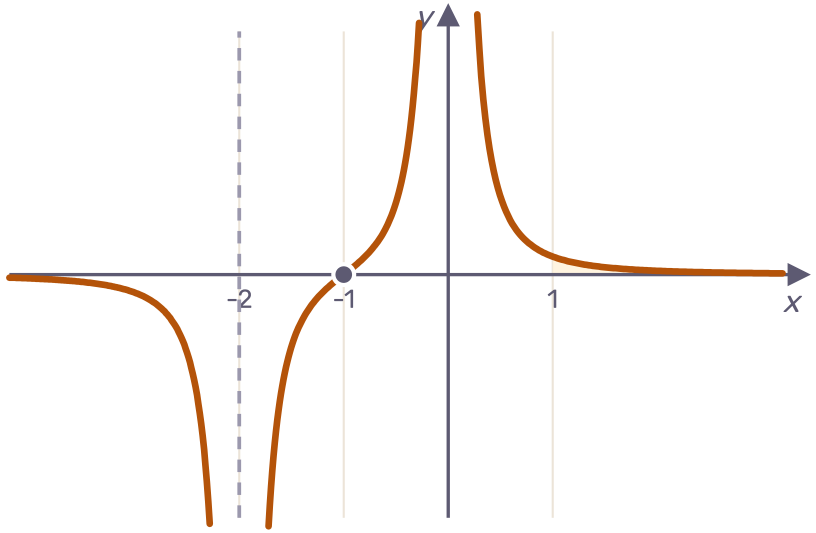
בגרות קיץ תשפ"ה (2025) – מועד א' • שאלה 1

$f(x)=\dfrac{2(x+1)}{(x^2+2x)^2}$. איזה מבין הגרפים I–IV מתאר את f?

1. **תחום:** $x(x+2)\neq 0 \leftarrow x\neq 0,\ x\neq -2$ (שתי אסימפטוטות אנכיות).
2. **סימן:** המכנה ריבוע – חיובי. הסימן לפי המונה: חיובית כש־$x>-1$ (בלי 0), שלילית כש־$x<-1$.
3. **ליד האסימפטוטות:** ליד -2 המונה שלילי $\leftarrow$ משני הצדדים; ליד 0 – $+\infty$ משני הצדדים.
4. פוסלים כל גרף שסותר אחד מאלה.

ד (3). המונה הוא נגזרת הביטוי שבריבוע: $(x^2+2x)'=2(x+1)$, ולכן $F(x)=-\frac{1}{x^2+2x}$:

$$\int_1^4 f(x)\,dx=-\frac{1}{24}+\frac{1}{3}=\frac{7}{24}$$



הגרף המתאים (III). השטח מ־1 עד 4 צבוע.

עוד דוגמה: תחום, סימן ושטח

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד ב' • שאלה 1

ב1 הפונקציה מוגדרת רק עבור $x \le 6$, ובין 0 ל־6 היא שלילית. איזה ביטוי מתאים?

ביטויים עם $\sqrt{x-6}$ מוגדרים רק עבור $x \ge 6$ – נפסלים.

בין 0 ל־6: $x\sqrt{6-x} > 0$ – נפסל; $-x\sqrt{6-x} < 0$ ✓

$$f(x) = -x\sqrt{6-x}$$

ב2 $g(x) = f^2(x)$. חשבו את השטח המוגבל בין גרף g לציר ה־x.

$$g(x) = x^2(6-x) = 6x^2 - x^3$$

$g \ge 0$, ומתאפסת ב־0 וב־6:

$$S = \int_0^6 (6x^2 - x^3)\,dx = \left[2x^3 - \frac{x^4}{4}\right]_0^6$$

$$= 432 - 324 = 108$$

אינדוקציה עם נוסחת סכום – עוד אחת

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד ב' • שאלה 1

הוכיחו שלכל n טבעי: $1^3+2^3+\cdots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

בדיקה: $1^3=1$ ו־$\frac{1\cdot4}{4}=1$ ✓

הנחה: $1^3+\cdots+k^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}$

צעד: לפי ההנחה,

$$\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3=\frac{(k+1)^2}{4}\left(k^2+4k+4\right)$$

$$=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}\ \checkmark$$

ולפני ההוכחה

לפעמים מבקשים קודם למצוא פרמטר מהנוסחה. מציבים $n=2$ (שני מחוברים):

$$1^3+2^3=9=\frac{4\cdot 9}{b}\ \Rightarrow\ b=4$$

שימו לב – הטעויות הנפוצות

1. באינדוקציה – לכתוב **במפורש** את ההנחה ואת מה שצריך להוכיח.
2. בצעד – חובה **להשתמש בהנחה**; בלי זה אין הוכחה.
3. בסכום: המחובר האחרון עבור $k+1$ – מציבים $k+1$ במחובר הכללי, למשל $(2k+2)^2$.
4. בהתאמת גרף – נימוק במילים: תחום, סימן, אסימפטוטות.
5. שטח מתחת לציר ה־x – לוקחים ערך מוחלט / מחלקים לקטעים.
6. „פיתול" = f'' מחליפה סימן (או קיצון של f'), לא רק $f''=0$.

בדיקה עצמית

1. הוכיחו באינדוקציה: $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$
2. הוכיחו באינדוקציה ש־5^n-1 מתחלק ב־4.
3. הגרף של f' חותך את ציר ה־x ב־$x=2$, משלילי לחיובי. מה יש ל־f ב־$x=2$?
4. נתון ש־$f(1)=2$. וגם נתון $\int_1^3 f'(x)\,dx=4$. מצאו את $f(3)$.

התשובות (לפתוח אחרי שפתרתם)

1. בדיקה: $1=1^2$. צעד:
$$k^2+(2k+1)=(k+1)^2$$
2. בדיקה: $5-1=4$. צעד:
$$5^{k+1}-1=5(5^k-1)+4$$
3. מינימום
4. $f(3)-f(1)=4 \leftarrow f(3)=6$