חדו״א – פונקציות טריגונומטריות

מצגת הסבר – זוגיות, משוואות, קיצון ושטח

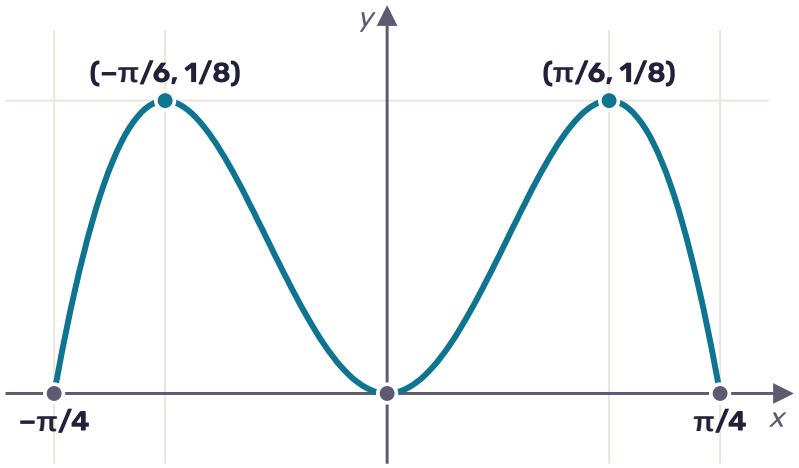
מתמטיקה 5 יח״ל | שאלון 35571 | תכנית חדשה

האתר נבנה ע״י עדי והבינה

מה נלמד?

בבחינה זו בדרך כלל **שאלה 7**. חקירה של פונקציה עם $\sin$, $\cos$ או $\tan$ **בתחום נתון**:

1. זוגית או אי־זוגית?
2. נגזרת ← **משוואה טריגונומטרית** ← נקודות קיצון (כולל קצוות התחום)
3. סקיצה של f (ולפעמים של f')
4. פונקציה חדשה (עם שורש, או $\frac{1}{f}$) – תחום, סקיצה, **שטח**



בגרות קיץ תשפ"ו מועד ב׳

הנוסחאות מהנוסחאון

נגזרות

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x$$
$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

אינטגרלים

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$
$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$$

זהויות

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha \qquad \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha \qquad \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$$

זווית כפולה

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$= 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

ובנוסף מהנוסחאון: נגזרת של מכפלה, של מנה ושל פונקצייה מורכבת – למשל $(\sin^2 x)' = 2\sin x\cos x = \sin 2x$.

זוגית או אי־זוגית?

זוגית

$f(-x)=f(x)$ ← הגרף סימטרי לציר ה־y

אי־זוגית

$f(-x)=-f(x)$ ← הגרף סימטרי לראשית

תנאי ראשון: **התחום סימטרי** סביב 0. אחר כך מציבים $-x$ ומשתמשים בזהויות.

אם f זוגית – f' אי־זוגית (ולהפך).

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד ב' • שאלה 7

$f(x)=\sin^2 x\cdot\cos 2x$ בתחום $-\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned}f(-x)&=\sin^2(-x)\cdot\cos(-2x)\\&=(-\sin x)^2\cdot\cos 2x\\&=\sin^2 x\cos 2x=f(x)\end{aligned}$$

f זוגית

משוואות טריגונומטריות בתחום

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1

1. מפרקים לגורמים (גורם משותף, או הצבה $t=\cos x$).
2. פותרים כל גורם: $\cos x = c$ / $\sin x = c$.
3. כותבים את כל הפתרונות, ולוקחים רק את אלה **שבתחום**.

בגרות קיץ תשפ"ד (2024) – מועד ב' • שאלה 7

בתחום $-\pi \le x \le \pi$:

$$f'(x) = 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

הצבה $t = \cos x$: $2t^2 + t - 1 = 0$

$$(2\cos x - 1)(\cos x + 1) = 0$$

$$\cos x = \tfrac{1}{2} \;\Rightarrow\; x = \pm\tfrac{\pi}{3}$$

$$\cos x = -1 \;\Rightarrow\; x = \pm\pi$$

נגזרת וטבלת סימנים (ב)

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד ב' • שאלה 7

כלל המכפלה, עם $(\sin^2 x)' = \sin 2x$:

$$f'(x) = \sin 2x \cos 2x + \sin^2 x \cdot (-2\sin 2x)$$
$$= \sin 2x \left(\cos 2x - 2\sin^2 x\right)$$

לפי $2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$:

$$f'(x) = \sin 2x \left(2\cos 2x - 1\right)$$

בתחום $-\frac{\pi}{2} \le 2x \le \frac{\pi}{2}$:

$$\sin 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \qquad \cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{6}$$

x	f'	f
$-\frac{\pi}{4} < x < -\frac{\pi}{6}$	+	עולה
$-\frac{\pi}{6} < x < 0$	−	יורדת
$0 < x < \frac{\pi}{6}$	+	עולה
$\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{4}$	−	יורדת

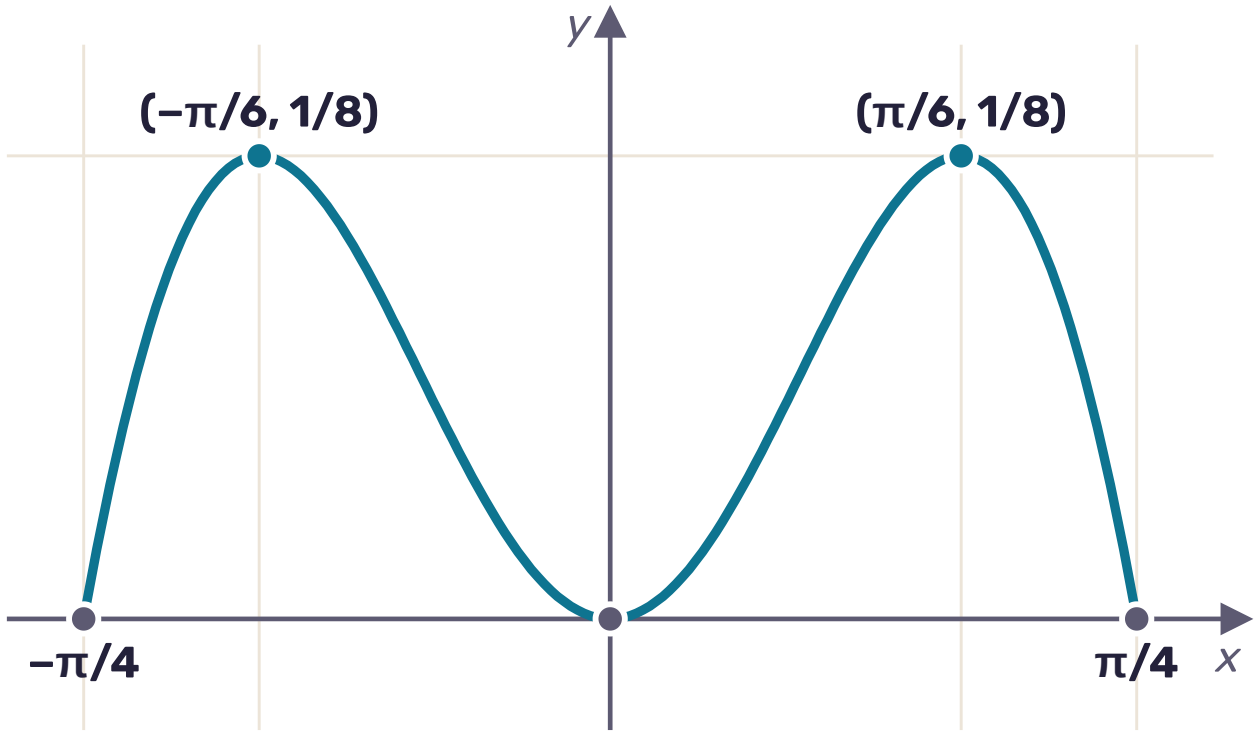
הערכים בנקודות:

$$f(0) = f\left(\pm\tfrac{\pi}{4}\right) = 0 \qquad f\left(\pm\tfrac{\pi}{6}\right) = \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{8}$$

מקסימום $\left(\pm\frac{\pi}{6}, \frac{1}{8}\right)$, מינימום $(0,0)$ ובקצוות

סקיצה ופונקציה חדשה (ג, ד)

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד ב' • שאלה 7



צורת „M", סימטרית לציר ה־y, $f(x) \geq 0$

$g(x) = \sqrt{a \cdot f'(x)}$, כאשר $a < 0$. מצאו את תחום ההגדרה של g.

צריך $a \cdot f'(x) \geq 0$, ו־$a < 0$, ולכן $f'(x) \leq 0$. לפי הטבלה:

$$\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{4} \qquad -\frac{\pi}{6} \leq x \leq 0$$

בודקים את קצות התחום:

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1 < 0$ ✓ $\qquad f'\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 1 > 0$ ✗

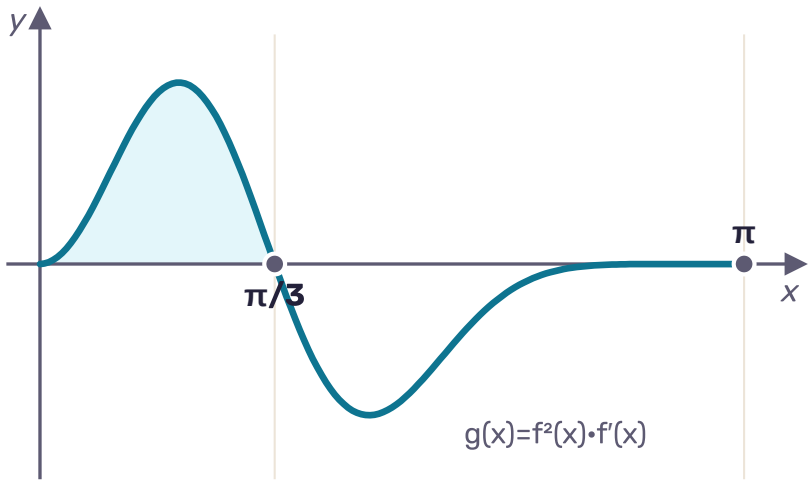
ד (2). $g = 0$ בדיוק כאשר $f' = 0$:

$$x = -\frac{\pi}{6}, \quad x = 0, \quad x = \frac{\pi}{6}$$

שאלת בגרות פתורה – קיצון ושטח

בגרות קיץ תשפ"ד (2024) – מועד ב' • שאלה 7

נתונה הפונקציה $f(x)=(1+\cos x)\sin x$ בתחום $-\pi \le x \le \pi$. הפונקציה $g(x)=f^2(x)\cdot f'(x)$ מוגדרת בתחום $0 \le x \le \pi$. חשבו את השטח ברביע הראשון בין גרף g לציר ה־x.



ד. מהשקף הקודם:

$$f'(x)=(2\cos x-1)(\cos x+1)$$

הגורם $\cos x+1$ אינו שלילי, ולכן הסימן נקבע לפי $2\cos x-1$. המקסימום:

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

ו. תמיד $f^2\ge 0$, ולכן הסימן של g הוא הסימן של f'.

כלומר $g>0$ רק בתחום $0<x<\frac{\pi}{3}$. לפי הנוסחאון:

$$\int f[u(x)]\cdot u'(x)\,dx=F[u(x)]+C$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} f^2(x)f'(x)\,dx=\left[\frac{f^3(x)}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{3}\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)^3$$

$$\frac{27\sqrt{3}}{64}\approx 0.731$$

שימו לב – הטעויות הנפוצות

1. עובדים ב**רדיאנים**, והמחשבון במצב RAD.
2. במשוואה – כל הפתרונות **בתחום** (גם שליליים), ולא רק אחד.
3. עם $2x$: התחום של $2x$ כפול מהתחום של x.
4. **קצוות התחום** – גם הם נקודות קיצון (קצה).
5. „זוגית" – מראים $f(-x)=f(x)$ באלגברה, לא רק „לפי הגרף".
6. בשורש: $\sqrt{a\,f'(x)}$ – הסימן של a קובע אם צריך $f'\geq 0$ או $f'\leq 0$.

בדיקה עצמית

1. האם $h(x) = x\sin x$ (בתחום $-\pi \le x \le \pi$) זוגית או אי־זוגית?
2. פתרו $\cos x = -\frac{1}{2}$ בתחום $0 \le x \le 2\pi$.
3. $f(x) = x + 2\cos x$ בתחום $0 \le x \le \pi$. מצאו את שיעורי ה־x של נקודות הקיצון הפנימיות וקבעו את סוגן.
4. חשבו: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$
5. גזרו: $y = \tan 2x$

התשובות (לפתוח אחרי שפתרתם)

1. $(-x)\sin(-x) = x\sin x$ ← זוגית
2. $x = \frac{2\pi}{3}$ או $x = \frac{4\pi}{3}$
3. $f'(x) = 1 - 2\sin x = 0$
   $x = \frac{\pi}{6}$ מקסימום, $x = \frac{5\pi}{6}$ מינימום
4. $\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$
5. $\frac{2}{\cos^2 2x}$