טריגונומטרייה במישור

מצגת הסבר – משפט הסינוסים, משפט הקוסינוסים ושטח משולש

מתמטיקה 5 יח״ל | שאלון 35571 | תכנית חדשה

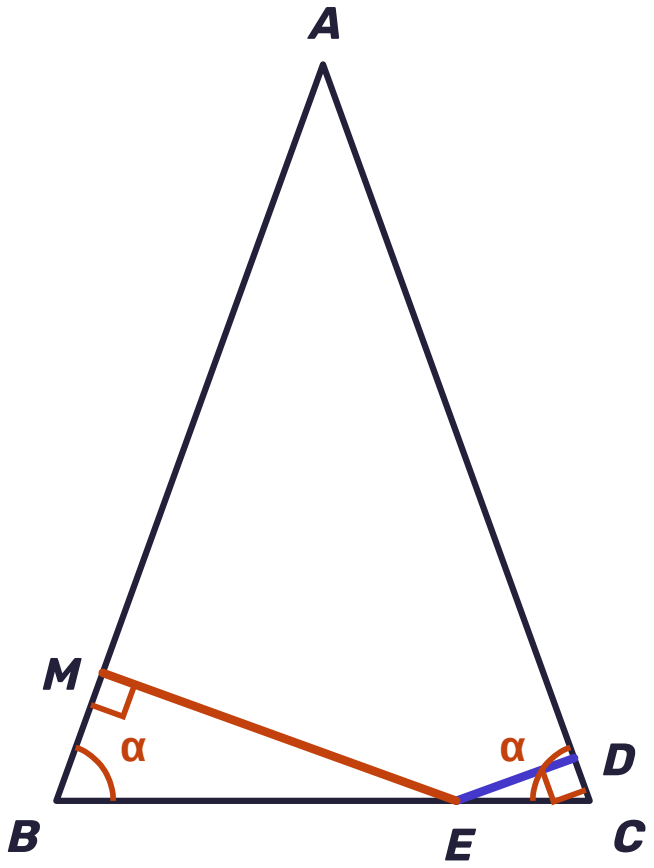
האתר נבנה ע״י עדי והבינה

מה נלמד?

בבחינה זו **שאלה 5**. בדרך כלל נתון סרטוט עם **פרמטר** (k, α), ובשאלה:

1. **להביע** צלעות בעזרת k ו־α
2. להשתמש בנתון (שטח, רדיוס) כדי למצוא את **הזווית**
3. למצוא את k או צלע / רדיוס נוסף

הכלים: משולש ישר זווית, משפט הסינוסים, משפט הקוסינוסים, נוסחת השטח.



בגרות קיץ תשפ"ו מועד ב'

משולש ישר זווית

יחס	במילים
$\sin\alpha$	ניצב מול הזווית ÷ יתר
$\cos\alpha$	ניצב ליד הזווית ÷ יתר
$\tan\alpha$	ניצב מול ÷ ניצב ליד

„הביעו באמצעות k ו־α" ← מחפשים משולש ישר זווית שבו הצלע ידועה.

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד ב' • שאלה 5

$EC = k$, $BE = 3k$, ובמשולש שווה שוקיים $\angle B = \angle C = \alpha$.

במשולש EDC (ישר זווית ב־D):

$$\sin\alpha = \frac{DE}{EC} \Rightarrow DE = k\sin\alpha$$

במשולש EMB (ישר זווית ב־M):

$$\sin\alpha = \frac{ME}{BE} \Rightarrow ME = 3k\sin\alpha$$

הנוסחאות מהנוסחאון

משפט הסינוסים

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$$

R – רדיוס המעגל החוסם את המשולש

משפט הקוסינוסים

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$$

γ – הזווית הכלואה בין a ל־b

שטח משולש

$$S=\frac{1}{2}\,b\,c\,\sin\alpha$$

α – הזווית הכלואה בין b ל־c

$$S=\frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin(\beta+\gamma)}$$

β,γ – הזוויות ליד הצלע a

זהויות שימושיות

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$$

איזה משפט מתאים?

מה ידוע במשולש	מה מחפשים	הכלי
צלע ושתי זוויות	צלע אחרת	משפט הסינוסים
צלע והזווית שמולה	רדיוס המעגל החוסם R	משפט הסינוסים $(= 2R)$
שתי צלעות והזווית שביניהן	הצלע השלישית	משפט הקוסינוסים
שלוש צלעות	זווית	משפט הקוסינוסים
שתי צלעות והזווית שביניהן	שטח	$S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$

זווית היקפית של $90^\circ \leftarrow$ הצלע שמולה היא **קוטר**, כלומר $2R$.

מציאת זווית: פתרון אחד או שניים?

$\sin x = c$ ($0 < c < 1$)

בתוך משולש יש **שני** פתרונות:

$$x_1 = \sin^{-1} c, \qquad x_2 = 180^\circ - x_1$$

בוחרים לפי הנתונים: סכום זוויות, „α חדה", „$\alpha > 30^\circ$", צלע גדולה מול זווית גדולה...

$\cos x = c$

בין 0° ל־180° יש פתרון **אחד** בלבד.

($\cos x < 0$ ← הזווית קהה)

$\sin 2\alpha = c$

פותרים קודם את 2α (שני פתרונות בין 0° ל־180°), ורק אז מחלקים ב־2.

משפט הסינוסים עם פרמטרים

בגרות קיץ תשפ"ד (2024) – מועד א' • שאלה 5

במשולש ABP: $AB = k$, $\angle BAP = \alpha$, $\angle ABP = \beta$. הביעו את AP ואת BP.

$$\angle APB = 180^\circ - \alpha - \beta$$

$$\frac{AP}{\sin\beta} = \frac{BP}{\sin\alpha} = \frac{k}{\sin(180^\circ - \alpha - \beta)}$$

ולפי הזהות $\sin(180^\circ - x) = \sin x$:

$$AP = \frac{k\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \qquad BP = \frac{k\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$$

הטריק

הזווית השלישית היא $180^\circ - \alpha - \beta$, והסינוס שלה הוא $\sin(\alpha+\beta)$ – כך התשובה יוצאת נקייה.

שאלת בגרות פתורה (ב) – מציאת הזווית

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד ב' • שאלה 5

סכום השטחים של $\triangle EDC$ ו־$\triangle EMB$ הוא $1.6k^2$, ונתון $\alpha > 30^\circ$. מצאו את α.

הניצבים האחרים: $DC = k\cos\alpha$, $BM = 3k\cos\alpha$

$$\frac{k^2\sin\alpha\cos\alpha}{2} + \frac{9k^2\sin\alpha\cos\alpha}{2} = 1.6k^2$$

$$5k^2\sin\alpha\cos\alpha = 1.6k^2$$

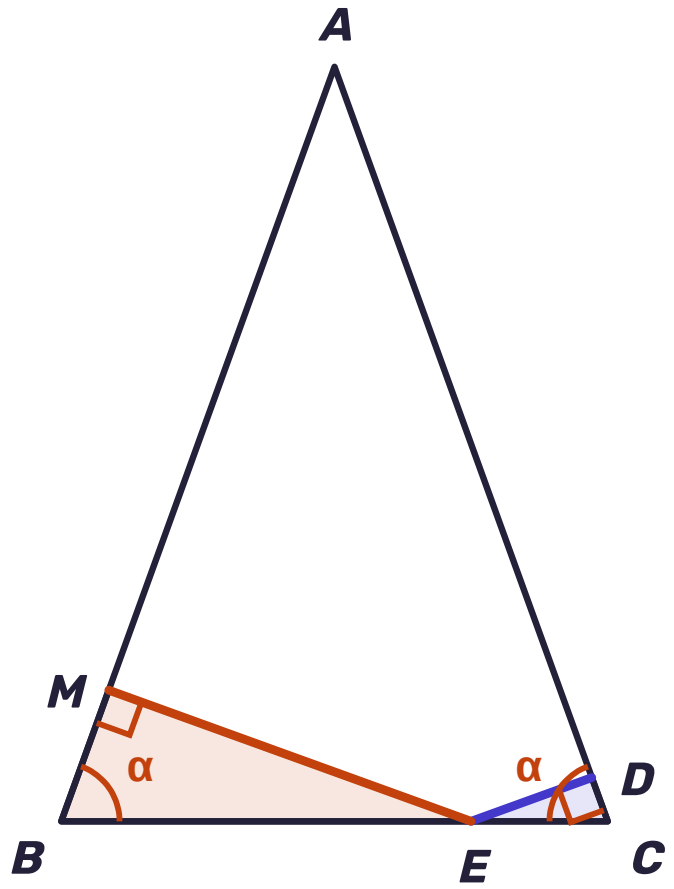
לפי $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$:

$$2.5\sin 2\alpha = 1.6 \;\Rightarrow\; \sin 2\alpha = 0.64$$

$$2\alpha_1 = 39.79^\circ \quad 2\alpha_2 = 140.21^\circ$$

כלומר 19.90° או 70.10°, ונתון $\alpha > 30^\circ$:

$$\alpha \approx 70.10^\circ$$



שאלת בגרות פתורה (ג) – רדיוס ו־k

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד ב' • שאלה 5

רדיוס המעגל החוסם את $\triangle AED$ הוא 29. מצאו את k.

במשולש AED הזווית $\angle ADE = 90^\circ$. לפי משפט הסינוסים:

$$\frac{AE}{\sin 90^\circ} = 2R \;\Rightarrow\; AE = 58$$

הגובה AH בבסיס הוא גם תיכון, ולכן $HC = 2k$:

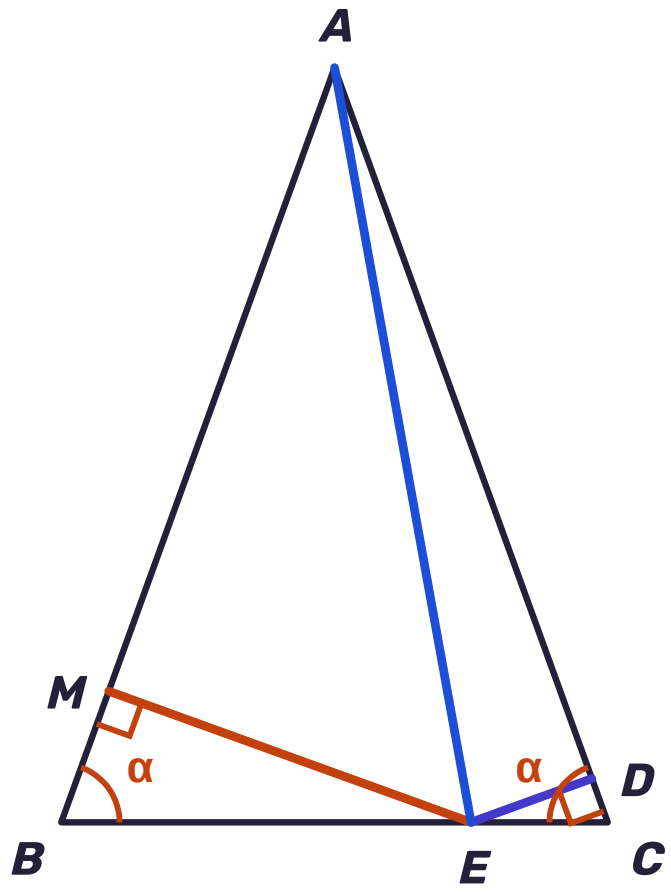
$$AC = \frac{2k}{\cos\alpha}$$

במשולש AEC, לפי משפט הקוסינוסים:

$$AE^2 = \frac{4k^2}{\cos^2\alpha} + k^2 - 2\cdot\frac{2k}{\cos\alpha}\cdot k\cos\alpha = k^2\left(\frac{4}{\cos^2\alpha} - 3\right)$$

$$k^2 \cdot 31.54 \approx 3364 \;\Rightarrow\; k^2 \approx 106.7$$

$$k \approx 10.33$$



שימו לב – הטעויות הנפוצות

1. **מחשבון במעלות** (DEG) – לא ברדיאנים.
2. $\sin x = c \leftarrow$ **שני** פתרונות במשולש. בודקים איזה מתאים.
3. במשפט הקוסינוסים – הזווית **הכלואה** בין שתי הצלעות.
4. $2R$ – **קוטר**. אם שואלים על רדיוס, מחלקים ב־2.
5. לא מעגלים באמצע: שומרים 4 ספרות אחרי הנקודה עד הסוף.
6. k הוא אורך $\leftarrow$ רק הפתרון החיובי.

בדיקה עצמית

1. במשולש $a=7$, $b=8$, והזווית שביניהן 60°. מצאו את הצלע השלישית.
2. מה שטח המשולש מסעיף 1?
3. במשולש צלע באורך 10 והזווית שמולה 30°. מה רדיוס המעגל החוסם?
4. במשולש $\sin\beta = 0.5$. מהן האפשרויות ל־β?
5. במשולש $\cos\gamma = -0.5$. מהי γ?

התשובות (לפתוח אחרי שפתרתם)

1. $c^2 = 49 + 64 - 2\cdot 7\cdot 8\cdot \frac{1}{2} = 57$
   $c \approx 7.55$
2. $S = \frac{1}{2}\cdot 7\cdot 8\cdot \sin 60^\circ \approx 24.25$
3. $\frac{10}{\sin 30^\circ} = 20 = 2R \leftarrow R = 10$
4. 30° או 150°
5. 120° (פתרון אחד)